Министерство образования Красноярского края
краевое государственное бюджетное
профессиональное образовательное учреждение
«Красноярский аграрный техникум»

РАССМОТРЕНО
На заседании цикловой комиссии
Общеобразовательных дисциплин
Протокол №6 от 10.01. 2024 г.
_________Т.Л. Григорьева

УТВЕРЖДАЮ:
Зам. директора по учебной работе
______________Т.М. Тимофеева
«__» ______________ 2024 г.

Методические указания для выполнения контрольной работы

«Математические методы решения прикладных профессиональных задач»

(заочное отделение)

Специальность 21.02.19 «Землеустройство»

Составил: преподаватель

Григорьева Т.Л.

Красноярск 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Пояснительная записка
2.	Содержание программы
3.	Теоретический материал
4.	Задание №1
5.	Задание №2
6.	Задание №3
7.	Задание №4
8.	Задание №5
9.	Учебно-методическое и информационное обеспечение

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Заочная форма обучения предполагает самостоятельную работу студента над учебным материалом: чтение учебников, использование Интернет-ресурсов, решение задач, выполнение контрольных заданий. В случае возникновения затруднений при самостоятельном изучении материала, студент может обратиться к преподавателю математики для получения устной консультации.

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради в клетку, на титульном листе которой должны быть написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, курс, специальность.
2. Задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением задачи надо полностью переписать ее условие.
3. Ход решения каждой задачи студент обязан оформить аккуратно, в полном соответствии с порядком решения типичной задачи, приведенной в данных методических указаниях.
4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба.
5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.
6. Контрольная работа выполняется самостоятельно.
7. В случае незачета по контрольной работе студент обязан в кратчайший срок исправить все отмеченные ошибки и предоставить работу на повторную проверку.
8. Студент выполняет тот вариант, который совпадает с цифрой порядкового номера в журнале.

Номер варианта			**Номера заданий**				
			№1	**№2**	**№3**	**№4**	**№5**
1	**11**	**21**	1	11	21	31	41
2	**12**	**22**	2	12	22	32	42
3	**13**	**23**	3	13	23	33	43
4	**14**	**24**	4	14	24	34	44
5	**15**	**25**	5	15	25	35	45
6	**16**	**26**	6	16	26	36	46
7	**17**	**27**	7	17	27	37	47
8	**18**	**28**	8	18	28	38	48
9	**19**	**29**	9	19	29	39	49
10	**20**	**30**	10	20	30	40	50

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Раздел 1. Элементы линейной алгебры.

Матрицы. Виды и свойства матриц. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Разложение определителя по элементам ряда.

Практическое занятие: Решение систем линейных уравнений в матричной форме, методом Гаусса.

Раздел 2. Элементы математического анализа.

Тема 2.1 Дифференциальное исчисление.

Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной, ее физический и геометрический смысл.

Правила нахождения производных. Правила и формулы дифференцирования. Теоремы дифференцирования. Производные элементарных функций.

Применение производных к исследованию функций. Нахождение экстремума. Наибольшее и наименьшее значение. Дифференциал функции. Приближенные вычисления.

Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Вогнутость кривой. Точки перегиба.

Правило нахождения точек перегиба. Дифференциал функции как главная часть ее приращения. Основные свойства дифференциала.

Практическое занятие: Вычисление производных элементарных функций в заданных точках. Применение производной к исследованию функции и построению графика.

Тема 2.2 Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл. Понятие первообразной данной функции. Свойства неопределенного интеграла.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как площадь криволинейной трапеции. Его принципиальное отличие от неопределенного интеграла.

Формула Ньютона- Лейбница. Теорема о среднем. Приближенные методы вычисления определенного интеграла.

Использование определенного интеграла для решения задач прикладного характера. Применение определенного интеграла к вычислению площадей и объемов.

Практическое занятие: Вычисление интегралов. Решение задач на приложения интеграла. Вычисление площадей фигур и объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.

Тема 2.3 Дифференциальные уравнения.

Определение дифференциального уравнения. Общее и частное решение дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение I порядка.

Решение задач на составление дифференциальных уравнений. Линейные однородные уравнения. Второго порядка с постоянными коэффициентами.

Практическое занятие: Решение дифференциальных уравнений.

Теоретический материал

Линейная алгебра

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность $m \cdot$и n чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.
Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B. В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают так

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной.* Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A=(a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n})$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например, 0=(0 0 … 0), $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой E.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число,

Транспонирование.

Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером).

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots\dots & a_{m2} \\ a_{1n} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *транспонированием*.

Транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T.
Пример: Найти матрицу транспонированную данной.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

б) $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B^T=(1 \quad -2 \quad 3)$.

Обратная матрица

Обратной A^{-1} *по отношению к матрице* А называется такая матрица, для которой выполняется равенство $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. ($E$ – единичная матрица).

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1) Находят определитель матрицы A
2) Находят алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и записывают новую матрицу
3) Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют)
4) Умножают полученную матрицу на $\frac{1}{D}$

Пример: Найти обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и выполнить проверку.

1) Вычисляем $D=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$. следовательно, обратная *матрица* существует.

2) Найдем присоединенную матрицу A^*. Для этого вычислим все *миноры* второго порядка матрицы A и *алгебраические* дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=7$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-1$, $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5$,

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-12$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=16$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=0$,

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5$.

3) Составим новую матрицу $A'=\begin{pmatrix} 7 & -12 & 1 \\ -1 & 16 & -3 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ и транспонируем

$A^T=\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -12 & 16 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

4) Найдем по формуле обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -12 & 16 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{5}{20} \\ -\frac{12}{20} & \frac{16}{20} & 0 \\ \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix}$$

Проверка $A \cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{5}{20} \\ -\frac{12}{20} & \frac{16}{20} & 0 \\ \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} & \frac{5}{20} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$.

Простейшие матричные уравнения и их решение.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Свободные члены и неизвестные запишем в виде матриц-столбцов

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда *матричным уравнением* называется уравнение вида $A \cdot X = B$.

План решения матричных уравнений:

1) Найти обратную матрицу A^{-1}
2) Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на столбец свободных членов B, т.е. $A^{-1} \cdot B$
3) Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

Пример: Решить матричное уравнение $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$.

Составим матричное уравнение $A \cdot X = B$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

1) Найдем обратную матрицу A^{-1}

Вычислим определитель

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +0 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (4+1)+1 \cdot (-8-2) =5 \neq 0$$

Запишем все алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5,\quad A_{21}=(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,\quad A_{31}=(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{12}=(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,\quad A_{22}=(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,\quad A_{32}=(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{13}=(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{23}=(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{33}=(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =5.$

Запишем новую матрицу и транспонируем:

$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, A^T= \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Запишем обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

2) $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + \frac{4}{5} \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot 15 \\ 2 \cdot 5 + \frac{12}{5} \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 15 \\ 0 \cdot 5 + \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3) Итак, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, т.е. $x_1=2, x_2=1, x_3=3$.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Суть метода - последовательное исключение неизвестных. С помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последних переменных, находятся все остальные переменные.

Пример $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

Перепишем систему линейных алгебраических уравнений в матричную форму.

Получится матрица 3 × 4, слева от разделительной линии стоят коэффициенты при переменных, а справа стоят свободные члены.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

1. Проведём следующие действия: первую строку так и перепишем

Из строки № 2 вычтем строку № 1 умноженную на 3

Из строки № 3 вычтем строку № 1. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

2. Проведём следующие действия:

Строку № 2 умножим на -1

Из строки № 3 вычтем строку № 2. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \end{array}\right)$$

3. Проведём следующие действия:

Строку № 3 умножим на -1

Из строки № 2 вычтем строку № 3 умноженную на 2 и запишем вторую строку

Из строки № 1 вычтем строку № 3 умноженную на 3 и запишем первую строку. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

4. Проведем следующие действия:

Из строки № 1 вычтем строку № 2 умноженную на 2. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

В левой части матрицы по главной диагонали остались одни единицы. В правом столбце получаем решение: $x_1 = -4$, $x_2 = -13$, $x_3 = 11$.

1. Определение производной функции

Производной функции $f(x)$ ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, при Δx стремящемся к нулю.

Основные правила дифференцирования

$(f+g)' = f' + g'$

$(f-g)' = f' - g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

Формулы дифференцирования

Основные элементарные функции	*Сложные функции*
1. $C' = 0$ 2. $(x)' = 1$ 3. $(x^n)' = nx^{n-1}$ 4. $(kx+b)' = k$ 5. $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ 6. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 7. $(log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$ 8. $(a^x)' = a^x lna$ 9. $(e^x)' = e^x$ 10. $(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}$ 11. $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$ 12. $(sin\, x)' = cos\, x$ 13. $(cos\, x)' = -sin\, x$ 14. $(tg\, x)' = \frac{1}{cos^2 x}$ 15. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$ 16. $(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 17. $(arccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 18. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 19. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ 2. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ 3. $(log_a u)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$ 4. $(a^u)' = a^u lna \cdot u'$ 5. $(e^u)' = e^u \cdot u'$ 6. $(ln\, u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ 7. $(sin\, u)' = cos\, u \cdot u'$ 8. $(cos\, u)' = -sin\, u \cdot u'$ 9. $(tg\, u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$ 10. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{sin^2 u} \cdot u'$ 11. $(arcsin\, u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ 12. $(arccos\, u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ 13. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ 14. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Пример: Найти значение производной функции $y = sin\,(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

$y' = (sin\,(4x - \frac{\pi}{6}))' = (4x - \frac{\pi}{6})' \cdot cos(4x - \frac{\pi}{6}) = 4\, cos(4x - \frac{\pi}{6})$

$y'\,(\frac{\pi}{12}) = 4\, cos(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}) = 4\, cos\, \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Ответ: $2\sqrt{3}$

Пример: $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Найти значение производной функции при $y\,'(-1)$.

Найдем производную данной функции: $y\,' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$. Ответ:14.

Пример: Найти производную данной функции $y = ln\, x \cdot cos\, x$.

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования:

$y\,' = (ln\, x)\,'\, cos\, x + ln\, x\, (cos\, x)\,' = 1/x \cdot cos\, x - ln\, x \cdot sin\, x$.

Пример: Найти производную данной функции $y = \frac{x^3}{\cos x}$.

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования:

$y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3 (\cos x)'}{cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{cos^2 x}$.

Определение дифференциала функции

С понятием производной тесно связано понятие **дифференциала**. Чтобы выяснить сущность этого понятия, рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную в интервале (a, b) и имеющую в некоторой точке x этого интервала производную $y' = f'(x)$. Придадим x приращение Δx, отличное от нуля, но не выводящее из интервала задания функции. Через Δy обозначим соответствующее приращение функции. Так как отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при стремлении Δx к нулю стремится к производной y', а разность между переменной, имеющей предел, и этим пределом есть величина бесконечно малая, то величина $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'$ стремится к нулю вместе с Δx. Предыдущее равенство можно записать в форме $\Delta y = y'\, \Delta x + \alpha\, \Delta x$, где α – стремится к нулю вместе с Δx.

Обозначив $\alpha\Delta x = \beta$, мы видим, что при бесконечно малом Δx переменная β также есть бесконечно малая величина и притом стремящаяся к нулю быстрее, чем Δx, так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\beta}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\alpha = 0.$$

Таким образом, величина β есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. Это означает, что при весьма малых Δx величина β во много раз меньше, чем Δx. Доказательство этого факта имеется во многих руководствах по математическому анализу, но оно выходит за рамки нашей программы.

Таким образом, при малых Δx величиной $\beta = \alpha\ \Delta x$ часто пренебрегают и довольствуются приближенной формулой $\Delta y = f'(x)\ \Delta x$.

Определение. Дифференциалом или главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующим приращению Δx, называется произведение производной $f'(x)$, вычисленной в точке x, на Δx.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается через dy или $df(x)$. Таким образом, $dy = y'\Delta x$ или $df(x) = f'(x)\ \Delta x$.

Из определения дифференциала следует, что он является функцией двух независимых переменных – точки x и приращения Δx.

Одним из основных свойств дифференциала, которое имеет широкое применение на практике – это то, что, пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка, можно приближенно заменять Δy – приращение функции ее дифференциалом dy.

Определение первообразной функции

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. (Для краткости при нахождении первообразных промежуток на котором задана функция, обычно не указывается).

Теорема: Если $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на заданном промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид: $F(x) + C$, где C – любое число.

Для нахождения общего вида первообразной можно воспользоваться таблицей:

Функция $f(x)$	$к$ (постоянная)	x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Множество её первообразных $F(x)$	$кx+C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}+C$	$-\cos x+C$	$\sin x+C$	$tg\,x+C$	$-ctg\,x+C$

Примеры:

1) Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

   а) $F(x)=\frac{x^7}{7}$, $f(x)=x^6$; б) $F(x)=4x^3-x+1$, $f(x)= 12x^2-1$.

а) $F'(x)=(\frac{x^7}{7})'=\frac{7x^6}{7}=x^6=f(x)$. б) $F'(x)= (4x^3)'-x'+1'=12x^2-1=f(x)$.

2) Найти одну из первообразных для функции $f(x)= x^{12}+3$.

Используя таблицу первообразных получим $F(x)=\frac{x^{12+1}}{12+1}+3x+C=\frac{x^{13}}{13}+3x+C$.

3) Для функции $f(x)=x+5$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку $A(2;5)$.

Все первообразные функции $f(x)=x+5$ находят по таблице $F(x)=\frac{x^2}{2}+5x+C$. Найдем число С, такое, чтобы график функции проходил через точку A. Подставляя вместо $x=2$, $F(x)=5$, получаем $5=\frac{2^2}{2}+5\cdot 2+C$. Следовательно $C= 5-14=-9$. Значит $F(x)=\frac{x^2}{2}+5x-9$.

Определение неопределённого интеграла

Пусть $f(x)$ - функция, заданная на объединении интервалов вещественной оси. Набор всех первообразных для $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Операция нахождения неопределённого интеграла по заданной функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции; найти неопределённый интеграл означает *проинтегрировать* данную функцию. Функция $f(x)$, записанная после знака интеграла (или, как часто говорят, *под* знаком интеграла), называется *подынтегральной функцией*.

Согласно доказанным выше теоремам о виде первообразных, неопределённый интеграл от функции $f(x)$ состоит из функций вида $F(x)+C$, где $F(x)$ - какая-либо фиксированная первообразная для $f(x)$, а C- величина, постоянная на каждом из непересекающихся интервалов, на которых задана функция $f(x)$. Поэтому можно написать такую формулу: $\int f(x)dx= F(x)+C$.
Итак, для того чтобы доказать равенство $\int f(x)dx= F(x)+C$, достаточно проверить, что $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то есть что $F'(x)=f(x)$.

Таблица неопределённых интегралов

1.	$\int 0dx = C$	9.	$\int \frac{dx}{cos^2x} = tg\, x + C$
2.	$\int 1dx = x + C$	10.	$\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctg\, x + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	11.	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
4.	$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = ln\|x\| + C$	12.	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C = -arccos \frac{x}{a} + C$
6.	$\int e^x dx = e^x + C$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\alpha}} = ln \left\|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right\| + C$
7.	$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$	15.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left\|tg \frac{x}{2}\right\| + C$
8.	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	16.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left\|tg \frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right\| + C$

Определение определённого интеграла

Для вычисления определенных интегралов от непрерывных функций с конечными пределами необходимо, пользуясь известными методами интегрирования, получить первообразную от интегрируемой функции и, применяя формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, найти разность значений первообразной при подстановке вместо переменной верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Задание № 1

Решение типовых примеров рассмотрено в теоретическом материале*

В задачах 1-10 решить системы уравнений

а) матричным способом

в) методом Гаусса

Вариант 1

а) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + y - z = -6 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$

Вариант 2

а) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 7x - y = 12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x + y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$

Вариант 3

а) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 7x_1 + 8x_2 = 6 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ 2x - 4y + z = 3 \end{cases}$

Вариант 4

а) $\begin{cases} 2x - 7y = 8 \\ 4x - 9y = 19 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 18 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$

Вариант 5

а) $\begin{cases} 6x - 4y = 5 \\ 8x - 3y = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

Вариант 6

а) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 2y = 41 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$

Вариант 7

а) $\begin{cases} 2x - 5y = -7 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + 4z = 11 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$

Вариант 8

а) $\begin{cases} 3x - 5y = 16 \\ 2x + y = 23 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 10 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}$

Вариант 9

а) $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 7x - y = 12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x + y + 2z = 10 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$

Вариант 10

а) $\begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9 \\ 7x_1 + 8x_2 = 6 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ 2x - 4y + z = 3 \end{cases}$

Задание № 2

В задачах 11-20 исследовать заданную функцию методами дифференциального исчисления и построить эскиз графика. Исследование функций рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) Найти область определения функции;
2) Найти производную функции;
3) Найти точки экстремума;
4) Определить промежутки монотонности функции;
5) Найти точки перегиба функции;
6) Определить промежутки выпуклости и вогнутости функции;
7) Найти значение функции в точках экстремума и перегиба;
11. $y=2x^3-9x^2+12x-5$
12. $y=x^3-6x^2+9x+1$
13. $y=x^3-3x^2-9x+1$
14. $y=x^3+3x^2-9x-10$
15. $y=x^3+6x^2+9x+2$
16. $y=2x^3-3x^2-12x+5$
17. $y=2x^3+3x^2-12x-8$
18. $y=2x^3+9x^2+12x+7$
19. $y=2x^3-15x^2+36x-32$
20. $y=2x^3-15x^2+24x+4$

Решение типового примера

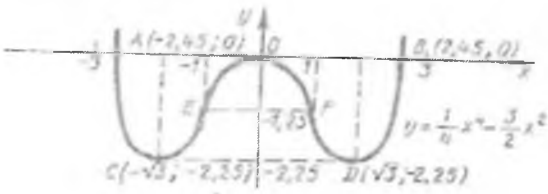
Пример: Исследовать и построить график функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$.
1. Область определения функции - интервал $(-\infty,\infty)$. Точек разрыва нет.
2. Здесь $f(-x)=f(x)$, так как x входит только в четных степенях. Следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy.
3. Чтобы определить точки пересечения графика с осью ординат, полагаем $x=0$, тогда $y=0$. Значит, кривая пересекает ось Oy в точке (0; 0).
Чтобы определить точки пересечения графика с осью абсцисс, полагаем $y=0$:
$\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2=0$; $x^4-6x^2=0$; $x^2(x^2-6)=0$. Отсюда $x^2=0$, $x_{1,2}=0$, т.е. две точки пересечения слились в одну точку касания; кривая в точке (0; 0) касается оси Ox. Далее, имеем $x^2-6=0$, т.е. $x_{3,4}=\sqrt{6}\approx\pm2{,}45$. Итак, в начале координат $O(0;0)$ кривая пересекает ось Oy и касается оси Ox, а в точках A $(-2{,}45;0)$ и B $(2{,}45;0)$ пересекает ось Ox.
4. Найдем критические точки функции:
$y'=x^3-3x$; $x^3-3x=0$; $x(x^2-3)=0$; $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}\approx\pm1{,}7$. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},0)$, $(0,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\infty)$.
5. Исследуем критические точки с помощью второй производной.
Находим $y''=3x^2-3$. При $x=0$ получим $y''_{x=0}=-3$, т.е. $y_{max}=0$, и, значит, $O(0;0)$ - точка максимума. Далее при $x=\sqrt{3}$ имеем $y''_{x=\sqrt{3}}=6$, т.е. $y_{min}=\frac{1}{4}(\sqrt{3})^4-\frac{3}{2}(\sqrt{3})^2=-2{,}25$. Таким образом, D $(\sqrt{3};-2{,}25)$ - точка минимума, а вследствие симметрии минимум достигается также в точке $C(-\sqrt{3};-2{,}25)$. Составим таблицу:

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\infty)$
y'	–	0	+	0	–	0	+
y	$\searrow$	$y_{min}=-2{,}25$	$\nearrow$	$y_{max}=0$	$\searrow$	$y_{min}=-2{,}25$	$\nearrow$

6. Имеем $y''=3(x^2-1)=0$, $3(x-1)(x+1)=0$, $x_{1,2}=\pm1$. Точки $x=-1$ и $x=1$ разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ и $(1,\infty)$. В интервалах $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$ имеем $y''>0$, т.е. здесь кривая вогнута, а в интервале $(-1,1)$ имеем $y''<0$, т. е. здесь она выпукла. При $x=-1$ и $x=1$ получаем точки перегиба E и F, ординаты которых одинаковы: $y(-1)=y(1)=-1{,}25$.
Составим таблицу:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1;\ 1)$	1	$(1;\ \infty)$
y''	+	0	–	0	+
y	Вогнута	Точка перегиба $(-1;\ -1{,}25)$	Выпукла	Точка перегиба $(1;\ 1{,}25)$	Вогнута

7. График изображен на рисунке.



Задание № 3

В задачах 21-30 вычислить неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием.

21. а) $\int(3x^{-4}+8x^{-5})dx$; б)$\int(7-6x)^3dx$.
22. а) $\int(x^3-6x^5)dx$; б)$\int(4+3x)^2dx$.
23. а) $\int(2x^8+4x^{-2})dx$; б)$\int \ln 3x\,dx$.
24. а) $\int(e^x-2x)dx$; б)$\int \cos 4x\,dx$.
25. а) $\int(3^x-e^x-1)dx$; б)$\int \sin 3x\,dx$.
26. а) $\int(\sin x-5)\,dx$; б)$\int \ln(3+x)\,dx$.
27. а) $\int(4-3\cos x)\,dx$; б)$\int(5-4x)^4dx$.
28. а) $\int(4^x-2\sin x-x)dx$; б)$\int \cos^2 x\,dx$.
29. а) $\int(4x^3-6x^2+4x-3)dx$; б)$\int \sin^2 x\,dx$.
30. а) $\int(x^{-4}+x^{-3}+1)dx$; б)$\int \ln(x-8)\,dx$.

Решение типового примера

1) Найти неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием.

а) $\int(5x^3-2x^2+3x-8)dx = 5\int x^3dx - 2\int x^2dx + 3\int xdx - 8\int dx = \frac{5x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-8x+C$.

б) $\int\frac{xdx}{3x^2+1}$.

Сделаем замену переменной: $x^2 = t$. Тогда $xdx = \frac{1}{2}dt$. Следовательно,

$$\int\frac{xdx}{3x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{3t+1}=\frac{1}{6}\int\frac{d(3t+1)}{3t+1}=\frac{1}{6}ln|3t+1|=\frac{1}{6}ln(3x^2+1)+C.$$

Задание № 4

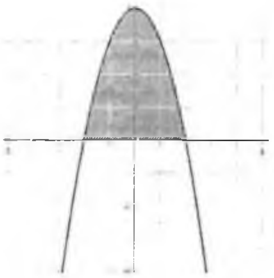
В задачах 31-40 вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями:

31. $y = x^2$, $y = 49$.
32. $y = x^3$, $y = 8$.
33. $y = x^2+1$, $x = -2$, $x = 2$.
34. $y = x^2$, $y = 64$.
35. $y = x+2$, $x = 2$, $x = 4$.
36. $y = x^3+1$, $y = 9$.
37. $y = x^2+1$, $y = 9$.
38. $y = 2x$, $x = 1$, $x = 2$.
39. $y = x^3+1$, $y = 28$.

40. $y = x^2+2$, $y = 27$

Решение типового примера.

Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y=0$.
$y = 4 - x^2$- квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз, вершина (0;4)
$y= 0$ - ось абсцисс. Найдём точки пересечения параболы с осью x: $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$, $x = 2$, $x = -2$.



Найдем $S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = (4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3})\Big|_{-2}^{2} = -(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}) = \frac{16}{3} - (-\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$

$= =10\frac{2}{3}$ (*кв.ед*).

Ответ: $10\frac{2}{3}$ *кв.ед*.

Задание № 5

В задачах 41-50 найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка:

41. $\begin{cases} \frac{dy}{4x^3} = \frac{dx}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

42. $\begin{cases} \frac{dy}{x} = \frac{dx}{y} \\ y(2) = 4 \end{cases}$.

43. $\begin{cases} \frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

44. $\begin{cases} dy = 3x^2dx \\ y(2) = 4 \end{cases}$.

45. $\begin{cases} ydy = (x-1)dx \\ y(0) = 4 \end{cases}$.

46. $\begin{cases} \frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

47. $\begin{cases} \frac{dy}{2x} = dx \\ y(1) = 6 \end{cases}$.

48. $\begin{cases} dy = (x+2)dx \\ y(2) = 8 \end{cases}$.

49. $\begin{cases} \frac{dy}{2x} = \frac{dx}{2y} \\ y(2) = 4 \end{cases}$.

50. $\begin{cases} dy = 4x^3dx \\ y(1) = 9 \end{cases}$.

Решение типового примера

Найти частное решение дифференцированного уравнения первого порядка $\begin{cases} \frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Это дифференцированное уравнение с разделяющимися переменными.
Производим разделение переменных:

$$ydy = 2x^2\,dx$$

Интегрируя обе части равенства, получаем:

$$\int ydy = \int 2x^2\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2x^3}{3} + C$$
$$y^2 = \frac{4x^3}{3} + 2C$$
Используя начальное условие, вычислим, соответствующее ему значение постоянного С:
$$2^2 = \frac{4 \cdot 0^3}{3} + 2C;\ 2C = 4;\ C = 2$$
Поэтому частное решение исходного дифференцированного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию, имеет вид: $y^2 = \frac{4x^3}{3} + 4$.

Учебно-методическое и информационное обеспечение

Перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:
1. Лисичкин В. Т., Соловейчик И.Л. Математика в задачах с решениями: Учебное пособие. 3-е изд.стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2022.

Дополнительные источники:
1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. «Алгебра и начала анализа (10-11 кл.)». - М.: Просвещение, 2011.
2. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. «Сборник задач по высшей математики»: учебник для студ.учреждений сред. проф. образования – М.: Академия, 2010.
3. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. «Элементы высшей математики»: учебник для студ.учреждений сред. проф. образования – М.: Академия, 2008.